



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, BOTOȘANI

15.02.2025

Clasa a VII-a

Barem de corectare și notare

Subiectul I (7 puncte)

- 1) Se consideră numărul real $a = 2027 - \frac{1+2+3+\dots+2025}{\sqrt{1+3+5+\dots+2025}}$
- a) Arătați că a este număr natural;
- b) Arătați că $S = a^0 + a^1 + a^2 + \dots + a^{2011}$ este divizibil cu 5.
- 2) Dacă $A = \left\{ \sqrt{6p^2 + 8p + 9} \mid p \in \mathbb{N}, p \text{ este număr prim} \right\}$, calculați $A \cap \mathbb{Q}$.

Soluție:

- 1) a) $1+2+3+\dots+2025=2025 \cdot 1013$ și $1+3+5+\dots+2025 = (1013)^2$ 1p
 Obține $a = 2 \in \mathbb{N}$ 1p
 b) Arată că $a : 5$ (prin grupare sau prin calcul)..... 1p
- 2) Pentru $p = 2$, obține $\sqrt{24 + 16 + 9} = 7 \in \mathbb{Q}$ 1p
 Pentru $p > 2$, p prim $\Rightarrow p$ impar, deci p^2 este de forma $4k+1$, atunci $6p^2+8p+9$ este de forma $4k+3$, deci nu este pătrat perfect..... 1p
 Finalizare $A \cap \mathbb{Q} = \{7\}$ 1p
 Oficiu..... 1p

Subiectul II (7 puncte)

Fie $d_1, d_2, d_3, \dots, d_k$ divizorii pozitivi ai unui număr natural nenul N . Calculați suma $S = \frac{1}{d_1+\sqrt{N}} + \frac{1}{d_2+\sqrt{N}} + \frac{1}{d_3+\sqrt{N}} + \dots + \frac{1}{d_k+\sqrt{N}}$.

(G.M. 6-7-8/2024)

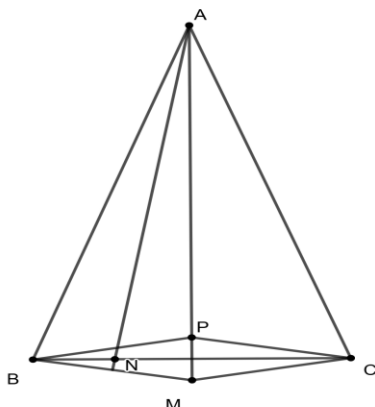
Soluție:

- Dacă d_k este divizor al nr. N , atunci și $\frac{N}{d_k}$ este divizor al nr. N 1p
- Putem presupune că $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \dots < d_k = N$
- $S = \frac{1}{d_1+\sqrt{N}} + \frac{1}{d_2+\sqrt{N}} + \frac{1}{d_3+\sqrt{N}} + \dots + \frac{1}{d_k+\sqrt{N}}$
- $S = \frac{1}{d_k+\sqrt{N}} + \frac{1}{d_{k-1}+\sqrt{N}} + \frac{1}{d_{k-2}+\sqrt{N}} + \dots + \frac{1}{d_1+\sqrt{N}}$
- $2S = \left(\frac{1}{d_1+\sqrt{N}} + \frac{1}{d_k+\sqrt{N}} \right) + \left(\frac{1}{d_2+\sqrt{N}} + \frac{1}{d_{k-1}+\sqrt{N}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{d_k+\sqrt{N}} + \frac{1}{d_1+\sqrt{N}} \right)$ 2p
- Aduce la același numitor în paranteze și obține $\frac{1}{d_1+\sqrt{N}} + \frac{1}{d_k+\sqrt{N}} = \frac{d_k+\sqrt{N}+d_1+\sqrt{N}}{d_1 d_k + d_1 \sqrt{N} + d_k \sqrt{N} + N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$,
 deoarece $d_1 \cdot d_k = N$ 2p
- Atunci, $2S = \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{\sqrt{N}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{k}{\sqrt{N}} \Rightarrow S = \frac{k}{2 \cdot \sqrt{N}}$ 1p
- Oficiu..... 1p

Subiectul III (7 puncte)

Se consideră triunghiul isoscel $\triangle ABC$ cu $AB=AC$, $m(\sphericalangle A) = 40^\circ$, și fie $N \in (BC)$ astfel încât $m(\sphericalangle BAN) = 10^\circ$. Notăm cu M simetricul punctului B față de AN și cu P simetricul punctului M față de BC . Demonstrați că patrulaterul $BMCP$ este romb.

Soluție:

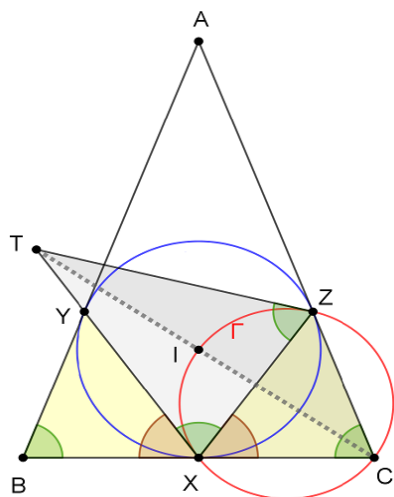


M este simetricul lui B față de AN \Rightarrow AN mediatoarea segmentului BM \Rightarrow AB=AM \Rightarrow	
$\angle BAN = \angle MAN = 10^\circ \Rightarrow$ (AM bisectoarea $\angle BAC$	2p
$\triangle ABC$ isoscel \Rightarrow AM mediatoarea segmentului BC \Rightarrow AM \perp BC, deci $P \in$ AM	1p
P este simetricul lui M față de BC \Rightarrow BC mediatoarea segmentului PM \Rightarrow PB=MB.....	1p
AM mediatoarea segmentului BC \Rightarrow BP=PC și MB =MC	1p
BM = MC = CP = PB , deci BMCP romb	1p
Oficiu	1p

Subiectul IV (7 puncte)

Fie triunghiul isoscel ABC cu baza BC. Dacă I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, notăm cu X, Y, respectiv Z punctele de tangență ale cercului cu laturile BC, AB, respectiv AC. Cercul circumscris triunghiului XZC este notat Γ , iar tangenta în Z la cercul Γ intersectează XY în T. Demonstrați că punctele C, I, T sunt coliniare.

Soluție:



$\triangle BXY \equiv \triangle CXZ$ (L.U.L) $\Rightarrow \angle YXB = \angle ZXC = \frac{180^\circ - \angle C}{2}$	2p
$\angle YXZ = 180^\circ - \angle YXB - \angle ZXC = 180^\circ - 2 \cdot \frac{180^\circ - \angle C}{2} = \angle C = \angle TZC$,	
deci (TX) \equiv (TZ) și TX tangentă în X la cercul Γ	2p
$\triangle TXC \equiv \triangle TZC$ CX = CZ ca tangente din C la cerc TX = TZ ca tangente din T la cerc.....	2p
TC = TC latura comuna	
Oficiu	1p